

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

С.Л.Парновський

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

ДОДАТКОВІ МАТЕРІАЛИ ДО КУРСУ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Прикладна фізика»
спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензент В.І. Жданов, проф., д.ф.-м.н., зав. відділом Астрономічної
обсерваторії КНУ імені Тараса Шевченка

Відповідальний
редактор Смирнов, С.А., канд. фіз.-мат. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 10.12.2020 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту (протокол № 9 від 26.10.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Парновський Сергій Людомирович, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ ДОДАТКОВІ МАТЕРІАЛИ ДО КУРСУ

Електрика та магнетизм: додаткові матеріали до курсу [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спец. 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / С.Л.Парновський; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 420 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 25 с.

Навчально-методичний комплекс до курсу «Електрика та магнетизм» призначено для студентів, які навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали». Навчальний посібник містить в собі додаткові матеріали до курсу, зокрема довідкову інформацію про основи векторного та тензорного аналізу, застосування векторного аналізу у електродинаміці (з прикладами), а також розділи курсу, що практично відсутні у підручниках. Це розгляд особливих точок поля та тензору натягу електромагнітного поля.

© С.Л. Парновський, 2020
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

Зміст

Зміст.....	3
1. Основи векторного аналізу. Короткий практичний курс.....	4
2. Основні операції векторного аналізу.....	4
2.1. Дивергенція div	4
2.2. Градієнт grad	5
2.3. Ротор rot	5
2.4. Оператор Гамільтона набла	6
2.5. Оператор Лапласа.....	7
2.6. Операція виду $(\vec{a}\nabla)$	8
2.7. Застосування операцій векторного аналізу до полів, які є добутком двох функцій.....	9
2.8. Операції другого порядку.....	9
2.9. Теорема Гаусса-Остроградського, Стокса і Гріна.....	10
3. Приклади застосування операцій векторного аналізу в електродинаміці.....	11
3.1. Приклади обчислень в електродинаміці з використанням техніки векторного аналізу.....	11
4. Векторний аналіз як частина тензорного аналізу.....	13
5. Питання курсу електрики і магнетизму, які не відображено в підручниках.....	16
5.1. Особливі точки поля.....	16
5.1.1. Особливі точки електростатичного поля на прикладі задачі про кулю в однорідному полі.....	17
5.1.2. Більш загальний випадок.....	18
5.2. Деякі властивості тензора натягу.....	20
5.2.1. Густина поверхневих сил, що діють на ділянку поверхні в електромагнітному полі.....	20
5.2.2. Тензор натягу поля.....	20
5.2.3. Густина поверхневих сил, що діють на ділянку кордону двох середовищ в електростатичному полі.....	23
5.2.4. Задача про підйом діелектричної рідини в конденсаторі.....	23
Додаткова література.....	25

1. Основи векторного аналізу. Короткий практичний курс

Мовою сучасної фізики є математика, перш за все мова диференціальних рівнянь. Але для електродинаміки не в меншій мірі важливо володіння апаратом векторного аналізу. Тут він викладений практично без доказів для часткового (з точки зору математики) випадку не викривленого тривимірного простору. Більшість формул можна знайти в будь-якому хорошому довіднику з математики, але деякі не настільки легко знайти. Наводяться деякі формули для декартової, сферичної і циліндричної системи координат з координатами (x, y, z) , (r, θ, φ) і (ρ, φ, z) . Вектори або векторні поля позначаються \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , і т.д., скаляри або скалярні поля φ , ψ і т.д. Розрахунки з використанням векторного аналізу можна проводити в будь-якій системі координат, результат буде тим самим.

Формули, наведені нижче, можна знайти в довідниках з математики, на кшталт [1]. Деякі додаткові питання див. у [2].

2. Основні операції векторного аналізу

2.1. Дивергенція div

За векторним полем \vec{a} можна скалярний поле $\text{div} \vec{a}$. У декартовій системі координат

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1)$$

У сферичній системі координат

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

В циліндричній системі координат

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (3)$$

Операція $\text{div} \vec{a}$ визначена в кожній точці простору або його частини. Точки, в яких $\text{div} \vec{a}$ відмінна від нуля, називаються джерелами поля. Часто при $\text{div} \vec{a} > 0$ кажуть про витoki, а при $\text{div} \vec{a} < 0$ – стоки поля. Поле з $\text{div} \vec{a} = 0$ в усьому просторі називається соленоїдальним.

З важливих формул відзначимо дивергенцію радіуса-вектора \vec{r} :

$$\text{div} \vec{r} = 3. \quad (4)$$

У загальному випадку в математиці $\operatorname{div} \vec{r}$ дорівнює розмірності простору.

2.2. Градієнт grad

За наявного скалярного поля ψ можна отримати векторне поле $\operatorname{grad} \psi$. У декартовій системі координат його компоненти дорівнюють

$$(\operatorname{grad} \psi)_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (5)$$

У сферичній системі координат його компоненти дорівнюють

$$(\operatorname{grad} \psi)_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \quad (6)$$

В циліндричній системі координат його компоненти дорівнюють

$$(\operatorname{grad} \psi)_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (7)$$

З формули похідної від складної функції ми отримуємо вираз для градієнта функції

$$\operatorname{grad}(\psi(\xi)) = \psi' \operatorname{grad}(\xi), \quad \psi' = \frac{d\psi}{d\xi}. \quad (8)$$

З формули похідної від добутку функцій ми отримуємо вираз для градієнта твору двох скалярних функцій

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}(\psi) + \psi \operatorname{grad}(\varphi). \quad (9)$$

З важливих формул відзначимо градієнт модуля радіуса-вектора \vec{r} , тобто радіальної координати r в сферичній системі координат:

$$\operatorname{grad} r = \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (10)$$

Вектор \vec{n} це одиничний вектор в радіальному напрямку, тобто в напрямку радіуса-вектора \vec{r} .

Якщо $\operatorname{grad} \psi = 0$ в якійсь точці простору, то в ній величина ψ має екстремум або сідлову точку. Якщо $\operatorname{grad} \psi = 0$ в якійсь області простору, то ψ в ній постійно $\psi = \text{const}$.

2.3. Ротор rot

Операція ротор ставить у відповідність векторному полю \vec{a} інше векторне поле $\operatorname{rot} \vec{a}$. Існує альтернативне позначення цієї операції $\operatorname{curl} \vec{a}$, яка в даний час вживається вкрай рідко, але

іноді зустрічається в науковій літературі. У декартовій системі координат його компоненти рівні

$$(\operatorname{rot} \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot} \vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad (\operatorname{rot} \vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (11)$$

У сферичній системі координат його компоненти дорівнюють

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{a})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ (\operatorname{rot} \vec{a})_\theta &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right], \\ (\operatorname{rot} \vec{a})_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

В циліндричній системі координат його компоненти дорівнюють

$$(\operatorname{rot} \vec{a})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot} \vec{a})_\varphi = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}, \quad (\operatorname{rot} \vec{a})_z = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right]. \quad (13)$$

Операція $\operatorname{rot} \vec{a}$ визначена в кожній точці простору або його частини. Точки, в яких $\operatorname{rot} \vec{a}$ різняться від нуля, називаються вихорами поля. Поле з $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ в усьому просторі називається потенційним.

З важливих формул відзначимо ротор радіуса-вектора \vec{r} :

$$\operatorname{rot} \vec{r} = 0. \quad (14)$$

2.4. Оператор Гамільтона набла

Лінійний векторний диференціальний оператор набла (назва запозичена з грец. $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ - рід арфи з трикутним остовом) або оператор Гамільтона позначається знаком ∇ . Він діє на вираз, що стоїть праворуч від нього, утворюючи три компоненти, як у вектора. Компоненти цього оператора є частковими похідними за координатами. В декартових координатах вони можуть бути записані у вигляді

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (15)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – орти, тобто одиничні вектори по осям x , y , z відповідно. Використовується також запис оператора набла через компоненти:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \quad (16)$$

При дії оператора набла на скаляр ψ виникає вектор з декартовими компонентами (ψ_x, ψ_y, ψ_z) , який збігається з (5). Таким чином

$$\nabla \psi = \text{grad} \psi. \quad (17)$$

Дія оператора набла на вектор \vec{a} (точніше векторне поле \vec{a}) менш очевидно. Два вектора можуть бути помножені скалярно і векторно, при цьому виходять скаляр і вектор. Якщо ми використовуємо скалярний добуток, то отримуємо

$$\nabla \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div} \vec{a}. \quad (18)$$

При використанні векторного добутку (позначається \times або квадратними дужками) ми отримуємо

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot} \vec{a}. \quad (19)$$

У цьому можна переконатися, порівнявши (19) і (11).

Таким чином, всі три наведені вище операції векторного аналізу записуються за допомогою оператора ∇ . При цьому при його дії на скаляр ми отримуємо градієнт (17), а на вектор - дивергенцію (18). Оскільки результат всіх обчислень в рамках векторного аналізу не змінюється при використанні іншої системи координат, вирази (6) і (7) разом з (17) можна прямо використовувати для визначення компонент оператора набла в сферичній і циліндричній системах координат. У сферичній системі координат його компоненти дорівнюють

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}. \quad (20)$$

В циліндричній системі координат його компоненти дорівнюють

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \quad (21)$$

2.5. Оператор Лапласа

При скалярному множенні оператора набла на нього ж виходить скалярний оператор Лапласа, він же лапласіан або оператор дельта $\Delta = \nabla \nabla = \nabla^2$. При дії на скаляр це дає

$$\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \nabla \nabla \psi = \nabla \text{grad} \psi = \text{div}(\text{grad} \psi), \quad (22)$$

тобто $\Delta = \text{div grad}$. Підставивши вирази для дивергенції і градієнта ми отримаємо для декартових координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (23)$$

для сферичних координат

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (24)$$

і для циліндричних координат

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (25)$$

Однак при дії на вектор можна здатися, що $\Delta \vec{a} = \nabla \nabla \vec{a} = \text{grad}(\text{div} \vec{a})$, що невірно. Насправді вектор має три компоненти, які слід визначати за трьома компонентами вектора за формулою (22), а саме

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{a})_x &= \Delta a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}, \\ (\Delta \vec{a})_y &= \Delta a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}, \\ (\Delta \vec{a})_z &= \Delta a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

2.6. Операція виду $(\vec{a} \nabla)$

Остання операція векторного аналізу це операція виду $(\vec{a} \nabla)$, в якій може використовуватися будь-який векторне поле як вектор \vec{a} . Воно діє на інше векторне поле \vec{b} , даючи в результаті ще одне векторне поле $(\vec{a} \nabla) \vec{b}$. При цьому операція $(\vec{a} \nabla)$ відрізняється від $(\nabla \vec{a}) = \text{div} \vec{a}$ порядком співмножників в скалярному добутку. Так як ∇ це не вектор, а оператор, скалярний добуток з його участю не є комутативним. Оператор ∇ діє на те, що праворуч від нього. В операції $(\nabla \vec{a}) = \text{div} \vec{a}$ це вектор \vec{a} . В операції $(\vec{a} \nabla) \vec{b}$ він діє тільки на вектор \vec{b} , але не на \vec{a} . Таким чином, операція $(\vec{a} \nabla)$ є скалярною і в декартових координатах має вигляд

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (27)$$

і компоненти вектора в декартових координатах має вигляд

$$\begin{aligned}
((\vec{a}\nabla)\vec{b})_x &= a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z}, \\
((\vec{a}\nabla)\vec{b})_y &= a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_y}{\partial z}, \\
((\vec{a}\nabla)\vec{b})_z &= a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{28}$$

З важливих формул відзначимо дію $(\vec{a}\nabla)$ на радіус-вектор \vec{r} :

$$(\vec{a}\nabla)\vec{r} = \vec{a}. \tag{29}$$

Операція $(\vec{a}\nabla)\vec{b}$ часто називається похідною векторного поля \vec{b} в напрямку вектора \vec{a} .

2.7. Застосування операцій векторного аналізу до полів, які є добутком двох функцій

Є одна операція, яка застосовується до скаляра. Якщо цей скаляр є добутком двох функцій або складною функцією, то слід використовувати формули (8) і (9). Якщо ж цей скаляр є скалярним добутком двох векторних полів, то можна використовувати формулу

$$\text{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\nabla)\vec{b} + [\vec{b} \times \text{rot}\vec{a}] + [\vec{a} \times \text{rot}\vec{b}]. \tag{30}$$

Декілька операцій застосовуються до векторів. Якщо векторне поле є добутком скаляра на вектор, то можна використовувати формули

$$\text{div}(\psi\vec{a}) = \psi \text{div}\vec{a} + (\vec{a} \text{grad}\psi), \tag{31}$$

$$\text{rot}(\psi\vec{a}) = \psi \text{rot}\vec{a} + [\text{grad}\psi \times \vec{a}], \tag{32}$$

$$(\vec{b}\nabla)(\psi\vec{a}) = \psi (\vec{b}\nabla)\vec{a} + \vec{a}(\vec{b} \text{grad}\psi). \tag{33}$$

Якщо векторне поле є векторний добуток двох векторів, то можна використовувати формули

$$\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}] = (\vec{b} \text{rot}\vec{a}) + (\vec{a} \text{rot}\vec{b}), \tag{34}$$

$$\text{rot}[\vec{a} \times \vec{b}] = (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b} + \vec{a} \text{div}\vec{b} - \vec{b} \text{div}\vec{a}, \tag{35}$$

$$(\vec{c}\nabla)[\vec{a} \times \vec{b}] = [(\vec{c}\nabla)\vec{a} \times \vec{b}] + [\vec{a} \times (\vec{c}\nabla)\vec{b}]. \tag{36}$$

2.8. Операції другого порядку

До результатів операцій векторного аналізу можна застосовувати ще раз подібні операції. Єдине обмеження пов'язане з тим, що не можна плутати скаляри та вектори. Одна подібна операція дає в результаті оператор Лапласа (22), результати двох інших завжди дорівнюють нулю:

$$\text{div}(\text{rot}\vec{a}) = 0, \tag{37}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\psi) = 0. \quad (38)$$

Ще дві можливих операції другого порядку пов'язані один з одним і з оператором Лапласа

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}. \quad (39)$$

2.9. Теореми Гаусса-Остроградського, Стокса і Гріна

Теорема Гаусса-Остроградського в математиці в разі не викривленого тривимірного простору розглядає замкнуту поверхню S , що обмежує область V . Тоді

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (40)$$

де dV - елемент об'єму області V , $d\vec{S}$ - елемент поверхні S , спрямований уздовж зовнішньої нормалі до неї і по модулю рівний площі елемента dS . У разі, якщо $\vec{a} = \psi \nabla \varphi = \psi \operatorname{grad} \varphi$, можна використовувати (22, 31) і отримати теорему Гріна

$$\oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV. \quad (41)$$

При виведенні ми врахували, що

$$\operatorname{grad} \varphi d\vec{S} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (42)$$

де напрямок зовнішньої нормалі до поверхні позначено \vec{n} , а похідна вздовж нього позначена $\partial/\partial n$.

Теорема Стокса в математиці в разі не викривленого тривимірного простору розглядає замкнутий контур L і натягнуту на нього поверхню S , яка не зобов'язана лежати в площині. Контур є кордоном поверхні. Тоді

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S}, \quad (43)$$

де вектор довжини елемента контуру позначено $d\vec{l}$, він спрямований уздовж контуру і по модулю дорівнює довжині елемента dl . При визначенні напрямку нормалі $d\vec{S}$ до поверхні S , яка незамкнута, є дві можливості з протилежними орієнтаціями нормалей. Для вибору треба скористатися правилом штопора (гвинта). Виберемо довільний напрямок обходу контура L , воно визначить напрямок елемента контуру $d\vec{l}$. Якщо повертати штопор для правші в цьому напрямку, то напрямок його зміщення вздовж "осі" штопора і слід вважати позитивним (додатнім) напрямком для нормалі $d\vec{S}$ до поверхні S .

3. Приклади застосування операцій векторного аналізу в електродинаміці

У електростатиці напруженість електричного поля \vec{E} виражається через потенціал поля φ через градієнт [3-6]

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad (44)$$

а його дивергенція пов'язана з щільністю заряду ρ

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi k\rho. \quad (45)$$

Комбінуючи ці дві формули отримаємо рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi k\rho. \quad (46)$$

Операція ротор важлива для розгляду магнітних полів, наприклад магнітна індукція \vec{B} виражається через векторний потенціал \vec{A}

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (47)$$

Тому в силу (37) магнітна індукція \vec{B} є соленоїдом полем.

Операція типу $(\vec{a}\nabla)$ виникає при розгляді сили, що діє на електричний диполь з дипольним моментом \vec{d} в електричному полі \vec{E} , що дорівнює

$$\vec{F} = (\vec{d}\nabla)\vec{E}. \quad (48)$$

3.1. Приклади обчислень в електродинаміці з використанням техніки векторного аналізу

Для початку зазначимо важливі властивості операцій векторного аналізу, які, по суті, є похідними по просторовим координатам. Вони комутують з взяттям похідних за часом і з інтегруванням уздовж кривої, по поверхні і за об'ємом, тому порядок цих операцій не важливий, наприклад

$$\frac{d(\text{grad}\psi)}{dt} = \text{grad}\frac{d\psi}{dt}, \quad \frac{d(\text{rot}\vec{a})}{dt} = \text{rot}\frac{d\vec{a}}{dt}, \quad \text{rot}\int\vec{a}dV = \int\text{rot}\vec{a}dV. \quad (49)$$

Перейдемо до прикладів. Потенціал електричного диполя з дипольним моментом \vec{d} дорівнює

$$\varphi = k\frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3}. \quad (50)$$

Тут використовується радіус-вектор \vec{r} і його модуль r . Застосуємо формулу (44) і отримаємо з використанням співвідношень (9, 8, 30, 4, 14, 32, 29, 10)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -k \operatorname{grad} \{r^{-3}(\vec{d}\vec{r})\} = -k \{r^{-3} \operatorname{grad}(\vec{d}\vec{r}) + (\vec{d}\vec{r}) \operatorname{grad}(r^{-3})\} = \\ &= -k \{r^{-3}(\vec{r}\nabla)\vec{d} + r^{-3}(\vec{d}\nabla)\vec{r} + r^{-3}[\vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{d}] + r^{-3}[\vec{d} \times \operatorname{rot} \vec{r}] - 3(\vec{d}\vec{r})r^{-4} \operatorname{grad}(r)\} = \\ &= -k \{r^{-3}(\vec{d}\nabla)\vec{r} - 3(\vec{d}\vec{r})r^{-5}\vec{r}\} = -k \{r^{-3}\vec{d} - 3(\vec{d}\vec{r})r^{-5}\vec{r}\} = k \frac{3(\vec{n}\vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{r^3}.\end{aligned}\quad (51)$$

Нагадаємо, що вектор \vec{n} це одиничний вектор в радіальному напрямку (10), а векторні операції від постійного вектора \vec{d} дорівнюють нулю.

Знайдемо магнітне поле магнітного диполя з магнітним дипольним моментом \vec{m} . Його векторний потенціал дорівнює

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m} \vec{r}]}{r^3}.\quad (52)$$

Його магнітна індукція \vec{B} дорівнює (47)

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \operatorname{rot} \frac{[\vec{m} \vec{r}]}{r^3} = r^{-3} \operatorname{rot}[\vec{m} \vec{r}] + [\operatorname{grad}(r^{-3}) \times [\vec{m} \vec{r}]] = \\ &= r^{-3} \{(\vec{r}\nabla)\vec{m} - (\vec{m}\nabla)\vec{r} + \vec{m} \operatorname{div} \vec{r} - \vec{r} \operatorname{div} \vec{m}\} - 3r^{-5}[\vec{r}[\vec{m} \vec{r}]] = \\ &= r^{-3} \{-\vec{m} + 3\vec{m}\} - 3r^{-5} \{\vec{m}r^2 - \vec{r}(\vec{r}\vec{m})\} = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{m}) - \vec{m}}{r^3}.\end{aligned}\quad (53)$$

Це практично вираз (51) з заміною \vec{d} на \vec{m} . При обчисленні використані формули (32, 35, 8, 10, 4, 29) і формула для подвійного векторного добутку

$$[\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).\quad (54)$$

Нагадаємо, що вектор \vec{n} це одиничний вектор в радіальному напрямку (10), а векторні операції від постійного вектора \vec{m} дорівнюють нулю.

Є і трохи інший порядок обчислення, який, природно, дає той же результат, але іншим шляхом

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \operatorname{rot} \left[\vec{m} \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \nabla \right) \vec{m} - (\vec{m}\nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{m} \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \operatorname{div} \vec{m} = -(\vec{m}\nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} + \\ &+ \vec{m} \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{m} \{r^{-3} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \operatorname{grad}(r^{-3})\} - r^{-3}(\vec{m}\nabla)\vec{r} - \vec{r}(\vec{m} \operatorname{grad}(r^{-3})) = \\ &= r^{-3} \{3 - 3\} \vec{m} - r^{-3} \vec{m} + 3r^{-5} \vec{r}(\vec{r}\vec{m}) = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{m}) - \vec{m}}{r^3}.\end{aligned}\quad (55)$$

Використано формули (35, 36, 31, 4, 8, 10, 29).

Розглянемо магнітостатику в вакуумі в системі СГС ($\mu = 1$, $\vec{B} = \vec{H}$). Виведемо закон Біо-Савара з рівняння

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \text{rot} \vec{H} = \text{rot} \vec{B} = \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}. \quad (56)$$

Крім (47) використано умова калібрування векторного потенціалу $\text{div} \vec{A} = 0$. Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV}{r}. \quad (57)$$

Магнітну індукцію і рівну їй напруженість поля отримаємо з (47)

$$\begin{aligned} \vec{B} = \text{rot} \vec{A} &= \text{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV}{r} = \frac{1}{c} \int \text{rot} \frac{\vec{j} dV}{r} = \frac{1}{c} \int dV \text{rot}(\vec{j} r^{-1}) = \\ &= \frac{1}{c} \int \{ r^{-1} \text{rot}(\vec{j}) + [\text{grad}(r^{-1}) \vec{j}] \} dV = -\frac{1}{c} \int r^{-3} [\vec{r} \vec{j}] dV = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j} \vec{r}]}{r^3} dV. \end{aligned} \quad (58)$$

Це ілюструє використання коммутативності операцій векторного аналізу з інтегруванням.

4. Векторний аналіз як частина тензорного аналізу

Деякі формули векторного аналізу виводяться з властивостей похідної, наприклад (8, 9), деякі з властивостей векторів, які переносяться на оператор набла. Так, (34) виходить з (54). Але не всі формули (30-36) можна отримати в рамках векторного аналізу, тим більше отримати просто. Однак це можна зробити з використанням методів і апарату тензорного аналізу.

Вважається, що його основи вже відомі наприклад з підручника [3]. Це поняття тензора, тензорного поля, рангу тензора, те, що скаляр це тензор нульового рангу, а вектор - тензор першого рангу. Вектор задається одновимірним масивом (рядком або стовпцем), довжина якого дорівнює розмірності простору, тобто трьом.

Існують об'єкти, наприклад квадратична форма, що задаються двовимірної матрицею 3×3 , вони описуються тензором другого рангу з двома індексами. А також об'єкти, які описуються тензором третього рангу з трьома індексами і більш високих рангів. Знаючи компоненти тензора в одній системі координат, завжди можна обчислити його компоненти в іншій, якщо задана матриця перетворення координат. Відповідна матриця при перетворенні декартової системи координат приведена в будь-якій книзі по тензорного аналізу.

Тензори однакового рангу можна додавати і віднімати. Тензорним твором двох тензорів є тензор з рангом, рівному сумі рангів вихідних тензорів. Існує операція згортки тензора, це специфічна тензорна операція, що знижує ранг тензора на два, обчислюється підсумовуванням по парі індексів (верхнього і нижнього, якщо вони різняться, але в даному посібнику ми їх не розрізняємо). Індеси, за якими ведеться підсумовування, пробігають, залишаючись рівними один одному, всі свої 3 значення, наприклад:

$$A_{ikl} = B_{iklmm} = \sum_{m=1}^3 B_{iklmm} = B_{ikl11} + B_{ikl22} + B_{ikl33}. \quad (59)$$

Ми використовуємо правило Ейнштейна, в якому де підсумовування за повторюваним індексом мається на увазі автоматично. Індеси позначаються буквами i, k, l, m, ... і приймають значення 1, 2, 3. Часто, якщо не як правило, згортка (тобто результат операції

згортки) позначається тією ж буквою, що і тензор, до якого згортка застосована, тільки, звичайно, з кількістю індексів, на два менших.

Ми використовуємо декартові координати, в яких радіус-вектор \vec{r} має компоненти $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, а оператор набла компоненти $\nabla_i = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) = \partial/\partial x_i$. Існують два тензора, які зберігають свій вигляд при будь-якому перетворенні декартової системи координат. Один з них це символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}. \quad (59)$$

Він описує компоненти одиничної матриці 3×3 , згортка з ним по одному індексу змінює позначення залишився індексу:

$$A_{ikl} \delta_{lm} = A_{ikm}, \quad A_{ikl} \delta_{km} = A_{iml}. \quad (60)$$

Згортка з символом Кронекера за двома індексами зводиться до згортки з ним:

$$A_{ikl} \delta_{kl} = A_{ikk} = A_i. \quad (61)$$

З його допомогою визначається згортка двох або декількох тензорів (в тому числі тензорів і векторів), наприклад:

$$C_{ikm} = A_{ikl} B_{ml} = \sum_{l=1}^3 A_{ikl} B_{ml} = A_{ikl} B_{mn} \delta_{ln}. \quad (62)$$

Цьому символу, природно, так само дію оператора набла ∇_i на радіус-вектор x_k

$$\nabla_i x_k = \delta_{ik}. \quad (63)$$

Другий тензор, який зберігає свій вигляд при будь-якому перетворенні декартової системи координат, це абсолютно асиметричний одиничний тензор Леві-Чивіті e_{ikl} (введений італійським математиком Тулліо Леві-Чівіта). Цей тензор має компоненти, які змінюють знак при перестановці будь-яких двох індексів, причому відмінні від нуля компоненти рівні ± 1 .

Тому всі компоненти, у яких хоча б два індексу збігаються, дорівнюють нулю, так що різні лише ті, у яких всі три індексу i, k, l різні. Поклавши $e_{123} = e_{xyz} = 1$ ми фіксуємо напрямки осей x, y, z як праву трійку, визначаємо напрямок векторного добутку та напрямки, отримані за правилами "правої руки" і "лівої руки". Все відмінні від нуля компоненти e_{ikl} дорівнюють $+1$ або -1 залежно від того, парних або непарних числом перестановок (транспозиція) можуть бути переведені числа i, k, l до послідовності $1, 2, 3$.

Добуток двох тензорів Леві-Чивіті виражається через символи Кронекера:

$$e_{ikl} e_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} \end{vmatrix}. \quad (64)$$

Згортаючи це по 2, 4 і 6 індексам, отримуємо:

$$e_{ikl}e_{mnl} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{in}, e_{ikl}e_{mkl} = 2\delta_{im}, e_{ikl}e_{ikl} = 6. \quad (65)$$

Тензорний добуток двох векторів є тензором другого рангу. Звертаючи його з символом Кронекера ми отримуємо скалярний добуток цих векторів:

$$(\vec{a}\vec{b}) = a_i b_i = a_i b_k \delta_{ik}, \quad (66)$$

а згортаючи його з тензором Леві-Чивіті - векторний добуток цих векторів:

$$[\vec{a}\vec{b}]_j = a_k b_l e_{ikl}. \quad (67)$$

Уже на цьому етапі ми можемо легко вивести формулу (54)

$$\begin{aligned} [\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}]]_i &= e_{ikl} a_k [\vec{b} \times \vec{c}]_l = e_{ikl} a_k e_{lmn} b_m c_n = a_k b_m c_n e_{ikl} e_{mnl} = a_k b_m c_n (\delta_{im}\delta_{kn} - \\ &- \delta_{km}\delta_{in}) = b_i a_k c_k - c_i a_m b_m = b_i (\vec{a}\vec{c}) - c_i (\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}))_i. \end{aligned} \quad (68)$$

Використано (60, 65-67) і те, що $e_{lmn} = e_{mnl}$.

Перейдемо до операцій векторного аналізу. З (17-19, 27) ми отримуємо

$$(\text{grad} \psi)_i = \nabla_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad (69)$$

$$\text{div} \vec{a} = \nabla_i a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \quad (70)$$

$$(\text{rot} \vec{a})_i = [\nabla \vec{a}]_i = e_{ikl} \nabla_k a_l = e_{ikl} \frac{\partial a_l}{\partial x_k}, \quad (71)$$

$$((\vec{a}\nabla)\vec{b})_i = a_k \nabla_k b_i = a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k}. \quad (72)$$

При дії оператора Гамільтона ∇_i на добуток ми можемо використовувати похідну від добутку функцій

$$\nabla_i (ABCD...) = (BCD...) \nabla_i A + (ACD...) \nabla_i B + (ABD...) \nabla_i C + (ABC...) \nabla_i D + \dots, \quad (73)$$

де як А, В, С, D можуть стояти тензори будь-якого рангу, включаючи нульового (скаляри). Зауважимо, що похідні від символу Кронекера і тензора Леві-Чивіті, які є набір нулів і одиниць, тобто констант, дорівнюють нулю, тому ці тензори можна переносити вліво від оператора набла. Зауважимо також, що ми можемо міняти букву, що позначає індекс, за яким йде згортка. Виведемо співвідношення (31-33)

$$\text{div}(\psi \vec{a}) = \nabla_i (\psi a_i) = \frac{\partial \psi a_i}{\partial x_i} = \psi \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \psi \text{div} \vec{a} + (\vec{a} \text{grad} \psi), \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
(\text{rot}(\psi \vec{a}))_i &= e_{ikl} \nabla_k (\psi a_l) = e_{ikl} \frac{\partial \psi a_l}{\partial x_k} = \\
&= \psi e_{ikl} \frac{\partial a_l}{\partial x_k} + e_{ikl} a_l \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = (\psi \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \psi \times \vec{a}])_i,
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
((\vec{b} \nabla)(\psi \vec{a}))_i &= b_k \nabla_k (\psi a_i) = b_k \frac{\partial \psi a_i}{\partial x_k} = \psi b_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} + a_i b_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \\
&= (\psi (\vec{b} \nabla) \vec{a} + \vec{a} (\vec{b} \text{grad} \psi))_i.
\end{aligned} \tag{76}$$

Нарешті, виведемо співвідношення (35), яке практично неможливо вивести в рамках векторного аналізу:

$$\begin{aligned}
(\text{rot}[\vec{a} \times \vec{b}])_i &= e_{ikl} \nabla_k [\vec{a} \times \vec{b}]_l = e_{ikl} \nabla_k e_{lmn} a_m b_n = e_{ikl} e_{mnl} \nabla_k a_m b_n = \nabla_k a_m b_n (\delta_{im} \delta_{kn} - \\
&- \delta_{km} \delta_{in}) = \nabla_k a_i b_k - \nabla_k a_k b_i = a_i \nabla_k b_k + b_k \nabla_k a_i - a_k \nabla_k b_i - b_i \nabla_k a_k = \\
&= ((\vec{b} \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \nabla) \vec{b} + \vec{a} \text{div} \vec{b} - \vec{b} \text{div} \vec{a})_i.
\end{aligned} \tag{77}$$

Співвідношення (37, 38) легко отримати з того, що згортка симетричного по парі індексів тензора $a_{ik...} = a_{ki...}$ і антисиметричного по цій же парі індексів тензора $b_{ik...} = -b_{ki...}$ завжди дорівнює нулю, адже

$$a_{ik...} b_{ik...} = a_{ki...} (-b_{ki...}) = -a_{ki...} b_{ki...} = -a_{ik...} b_{ik...}. \tag{78}$$

Як симетричний по парі індексів i, k тензор виступає комбінація $\nabla_i \nabla_k$, яка симетрична тому, що похідна не залежить від порядку диференціювання, як антисиметричного по цій же парі індексів тензора - тензор Леві-Чивіті.

$$\text{div}(\text{rot} \vec{a}) = \nabla_i e_{ikl} \nabla_k a_l = e_{ikl} \nabla_i \nabla_k a_l = 0. \tag{79}$$

$$(\text{rot}(\text{grad} \psi))_i = e_{ikl} \nabla_k \nabla_l \psi = 0. \tag{80}$$

5. Питання курсу електрики і магнетизму, які не відображено в підручниках

5.1. Особливі точки поля

Особливі точки можуть існувати у будь-якого векторного поля \vec{a} . Це сукупність точок, в яких поле зникає $\vec{a} = 0$. Зверніть увагу, що багато доказів властивостей силових ліній в електростатиці засновані на припущенні, що в досліджуваній точці напруженість поля не нульова. Наприклад, доказ того, що дві силові лінії не можуть перетинатися, мати злам, що силові лінії перпендикулярні еквіпотенціальній поверхні або поверхонь провідників вимагають виконання цього припущення. В особливих точках електростатичного поля, в яких $\vec{E} = 0$, це припущення не виконується.

Відомо, що силові лінії електростатичного поля можуть починатися і закінчуватися на зарядах або на нескінченності. Гірше відомо, що вони також можуть починатися і закінчуватися в особливих точках поля.

5.1.1. Особливі точки електростатичного поля на прикладі задачі про кулю в однорідному полі

Переконаємося в існуванні подібних точок на прикладі однієї задачі.

Умова задачі: Розглянемо однорідне електростатичне поле, в яке поміщений металева куля. Якщо вибрати «вісь» кулі в напрямку поля, то на «екваторі» кулі вибираємо точку O . Природно, що через аксіальну симетрію завдання всі точки на «екваторі» еквівалентні і т. O є їх типовим представником. Намалюємо тепер картину силових ліній поля і поцікавимося лінією (або лініями), що проходить через т. O . Хтось, знаючи, що силові лінії завжди перпендикулярні поверхні провідника, малює картину, зображену на Рис. 1 ліворуч під номером 1. Його опонент проти через те, що силова лінія має кут в т. O , а в школі вчать, що силова лінія не може мати зламів. Він пропонує варіант, зображений на Рис. 1 праворуч, з цифрою 2. Але на ньому силові лінії не перпендикулярні поверхні провідника. Хто з них має рацію? Або неправі обидва? Перед тим, як намалювати шукану картинку, треба дізнатися, який кут становить силова лінія поля, що проходить через т. O , з поверхнею провідника.

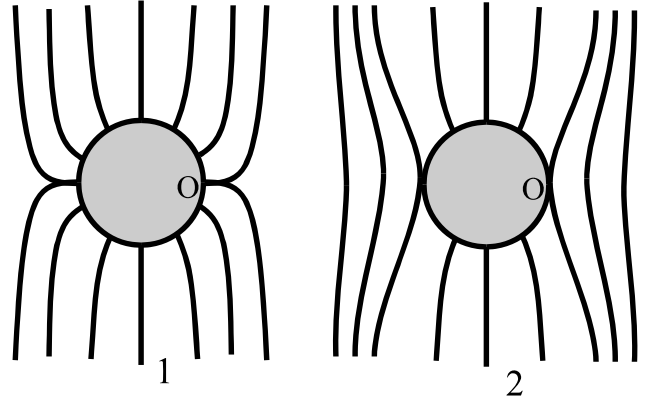


Рис. 1. Два гіпотетичних варіанти картини силових ліній електричного поля

Розв'язок задачі: Введемо в площині центрального перетину кулі дві системи координат - декартову (x, y) з центром в центрі кулі (вісь y спрямована вздовж напрямку поля, вісь x проходить через точку O) і полярну (r, θ) з центром в центрі кулі (кут θ відраховується від осі y , $r^2 = x^2 + y^2$). Позначимо радіус кулі R . Поза кулі потенціал поля буде сумою потенціалу однорідного поля $\varphi_1 = -Ey = -Er \cos \theta$ і поля диполя, що знаходиться в центрі кулі і має дипольний момент $\vec{d} = \vec{E}R^3$, тобто $\varphi_2 = \frac{ER^3 \cos \theta}{r^2}$ (тут і далі використовується система СГС):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = E \cos \theta r \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) = Ey \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right). \quad (81)$$

Виведення формули (81) можна знайти в будь-якому пристойному задачнику. Однак він і не потрібен. Розв'язок (81) задовольняє рівняння Лапласа поза кулі ($r > R$), має на великій відстані від нього потрібну асимптотику $\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varphi_1$ і задовольняє граничній умові $\varphi = 0$ на поверхні кулі. Тому, завдяки теоремі про єдиність розв'язку задач електростатики, це рішення буде єдино вірним. Власне кажучи, значення $\vec{d} = \vec{E}R^3$ є єдиним, при якому потенціал зануляють на поверхні кулі.

Зауважимо, що точка O лежить на перетині двох взаємно перпендикулярних еквіпотенційних поверхонь - поверхні кулі і площини $y = 0$.

Розглянемо поведінку (81) поблизу т. O . Для цього введемо нову декартову систему координат (z, u) з початком в цій точці. Координата u збігається з аналогічною координатою

системи (x, y) , а координата z виходить з координати x зрушенням $z = x - R$. При малих y, z отримуємо

$$\begin{aligned}\varphi &= -E \cos \varphi \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) = -E \left(y - \frac{yR^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) = \\ &= -Ey \left[1 - \left(1 + \frac{2z}{R} + \frac{z^2 + y^2}{R^2} \right)^{-3/2} \right] \approx -Ey \left[1 - \left(1 - \frac{3z}{R} \right) \right] = -\frac{3E}{R} yz.\end{aligned}\quad (82)$$

Поблизу точки O еквіпотенціальними поверхнями є осі y і z , а також сімейство гіпербол $yz = \text{const}$. На Рис. 2, де представлено картину поля в малій околиці т. O , вони намальовані штрихованою гіперболами. Силкові лінії поля ортогональні еквіпотенціальній поверхнею. На малюнку вони позначені суцільними лініями. Деякі з них є гіперболами, ортогональними поверхні кулі $z = 0$, деякі гіперболами, що не торкаються кулі. Крім гіпербол, силовими лініями будуть дві прямі, що починаються в точці O і утворюють кут 45° з поверхнею кулі. Звідси отримуємо відповідь: шуканий кут дорівнює 45° і картина силових ліній має вигляд, зображений на Рис. 3.

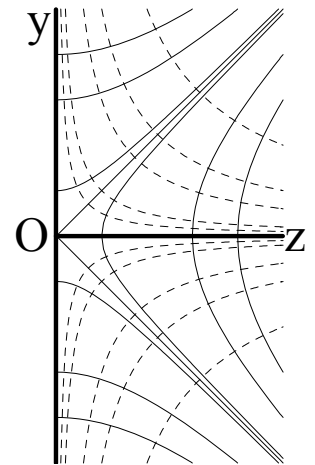


Рис. 2. Картина силових ліній електричного поля біля т. O з великим збільшенням

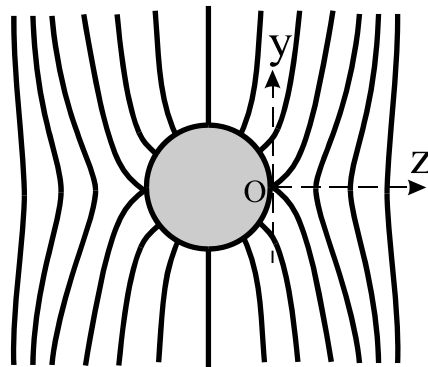


Рис. 3. Правильна картина силових ліній електричного поля біля кулі

У т. O напруженість поля дорівнює нулю, як і її тангенціальна складова, тому гранична умова $E_t = 0$ виконується, незважаючи на неперпендикулярність силових ліній.

5.1.2. Більш загальний випадок

Покажемо, що це рішення є окремим випадком більш загальної ситуації. Особливими точками поля (не тільки електричного) називаються точки, в яких його напруженість звертається в нуль. У загальному випадку поблизу довільної точки потенціал поля можна розкласти в ряд:

$$\varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^3 E_i x_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 W_{ik} x_i x_k + \dots, \quad (83)$$

де φ_0 - потенціал в даній точці, а $x_i = (x, y, z)$ - довільні декартові координати з початком в даній точці. Індеси i, k приймають значення 1, 2, 3 і нумерують координати. E_i - компоненти напруженості електричного поля. Поблизу особливої точки вони зануляються. Тензор

(матриця) W є симетричним і поворотом координат його можна привести до діагонального вигляду $W = \text{diag} (A, B, C)$. При цьому для потенціалу поблизу особливої точки поля отримуємо розкладання

$$\varphi = \varphi_0 + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \dots \quad (84)$$

Рівняння Лапласа $\Delta\varphi = 0$ виконується при

$$A + B + C = 0. \quad (85)$$

В особливих точках поля починаються або закінчуються силові лінії.

Якщо на поверхні провідника (без стрибків у напрямку нормалі до цієї поверхні) у нас є області з додатними і від'ємними зарядами (свідомо будуть у незарядженого провідника в поле), то розділяє їх крива буде складатися з особливих точок поля (тангенціальна складова вектора напруженості звертається в нуль через граничних умов, а нормальна - через те, що поверхнева щільність зарядів зануляють). При зсуві вздовж цієї кривої потенціал не змінюється. Тому вздовж дотичної до кривої буде лежати один з власних векторів матриці W , наприклад лежить уздовж осі z . Крім того відповідне власне значення наближається до нуля $C = 0$. Разом з умовою (85) це дає розклад

$$\varphi = \varphi_0 + A(x^2 - y^2) + \dots = \varphi_0 + A\zeta\xi + \dots \quad (\zeta, \xi) = x \pm y. \quad (86)$$

Видно, що (86) відрізняється від (82) заміною координат (y, z) на (ζ, ξ) і зміною константи, що стоїть перед твором цих координат. Тому маємо ту ж картину екіпотенційних поверхонь і силових ліній. Силовими лініями поблизу такої особливої точки будуть все так же два сімейства гіпербол і дві сепаратрисси $(\zeta = \pm\xi)$, що виходять з особливої точки і нахилені під кутом 45° до поверхні провідника. Так що заповітний кут в 45° буде і в картині силових ліній в загальному випадку особливих точок на поверхні, що не має кутів і виступаючих ребер.

Можливий і інший випадок особливих точок поля - ізолювані особливі точки. Якщо у нас є два точкових заряди одного знака, то на що з'єднає їх прямиий між зарядами буде точка, в якій напруженість поля наближається до нуля. Для зарядів різного знака і різних по модулю, така точка буде лежати на сполучає їх прямиий, але не між ними. Вона буде лежати за меншим за модулем зарядом. І для таких точок легко знайти картину силових ліній, виходячи з (84, 85). Через аксиальної симетрії ми бачимо, що напрямок уздовж лінії, що з'єднає заряди, має бути одним з власних векторів W . Нехай уздовж нього спрямована вісь z . Тоді в перпендикулярній площині ми маємо однакові власні значення $A = B = C / 2$ і (84) переходить в

$$\varphi = \varphi_0 + A(x^2 + y^2 - 2z^2) + \dots \quad (87)$$

Знайти картину силових ліній в цьому випадку нескладно. Вона буде дещо інший, ніж силові лінії на поверхні провідника - гіперболи стануть виду $y \sim x^{-2}$.

5.2. Деякі властивості тензора натягу

5.2.1. Густина поверхневих сил, що діють на ділянку поверхні в електромагнітному полі

Сила, що діє на тіло (або на деякий виділена ділянка простору) в електромагнітному полі може бути представлена у вигляді інтеграла по поверхні тіла S від щільності поверхневих сил \vec{T} , що діють на ділянку поверхні через присутність поля [3-5]:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{T} dS, \quad (88)$$

де компоненти вектора \vec{T} виражаються через так званий тензор натягу поля σ_{ik} і компоненти одиничного вектора в напрямку зовнішньої нормалі $d\vec{S} = \vec{n} dS$, як

$$T_i = \sigma_{ik} n_k. \quad (89)$$

Компоненти тензора натягу поля σ_{ik} знаходяться через напруженості електричного і магнітних полів \vec{E} і \vec{H} поза тілом біля його поверхні і діелектричну ϵ і магнітну μ проникності середовища в цій точці. Якщо всередині тіла є поле, то воно також забезпечує силу, діючу на поверхню, але сума цих сил дорівнює нулю і їх можна не брати до уваги при розрахунку повної сили, що діє на тіло. Однак при розрахунку щільності поверхневих сил, що діють на ділянку поверхні тіла \vec{T} , слід враховувати і дію поля всередині тіла. Ці сили, природно, необхідно враховувати, якщо ми розраховуємо силу, діючу на незамкнуту поверхню. Необхідно розрахувати компоненти сумарною сили, що виникає через поля з одного боку від кордону

$$F_i = \int_S \sigma_{ik} dS_k \quad (90)$$

і додати до них компоненти сумарною сили, що виникає через поля з іншого боку від кордону. При цьому враховувати, що напрямки нормалей до поверхні протилежні. Тому поверхнева щільність сили зануляють, якщо рівні напруженості електричного і магнітних полів \vec{E} і \vec{H} з двох сторін від поверхні. Саме це і спостерігається в середовищах з однорідними діелектричної та магнітної проникності.

Однак якщо є стрибок цих величин, наприклад на кордоні розділу двох середовищ, то виникає некомпенсована поверхнева щільність сили \vec{T} , що діє на ділянку поверхні. Її напрямок може бути довільним і її можна розкласти на силу тиску, перпендикулярну поверхні і силу зсуву, що діє вздовж поверхні. Якщо ми розглядаємо силу, діючу на рідину, то вона починає втягуватися в область, де поля сильніші. Це призводить до підвищення тиску рідини в конкретній точці. Умова рівноваги рідини з тиском P має вигляд

$$P\vec{n} + \vec{T} = \text{const}. \quad (91)$$

5.2.2. Тензор натягу поля

Тензор натягу поля σ_{ik} є симетричний ($\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$) тривимірний тензор другого рангу. Разом з вектором Пойнтінга і скаляром щільності енергії поля він утворює чотиривимірний тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля $T_{\alpha\beta}$, де грецькі індекси пробігають значення (0, 1, 2, 3), відповідні координатам чотиривимірного простору-часу. Тензор енергії-імпульсу відіграє важливу роль в загальній теорії відносності, але тут ми розглядаємо його частину, причому в плоскому просторі-часі, тобто без гравітаційного поля. Додатково ми будемо для простоти розглядати тільки випадок ізотропних середовищ, для яких можна ввести діелектричну і магнітну проникності ε і μ . Тензор натягу електромагнітного поля є сумою двох тензорів натягу. Перший називається максвелівським тензором натягу, він дорівнює

$$\sigma'_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} \right) + \frac{\mu}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right), \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \sigma' = & \frac{\varepsilon}{4\pi} \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{\mu}{4\pi} \begin{pmatrix} H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 & H_x H_y & H_x H_z \\ H_x H_y & H_y^2 - \frac{1}{2} H^2 & H_y H_z \\ H_x H_z & H_y H_z & H_z^2 - \frac{1}{2} H^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (93)$$

Другий тензор називається тензором стрікційних натягів або коротко стрікційним тензором. Позначаючи щільність середовища буквою τ (буква ρ , яку зазвичай використовують, застосована для позначення координати в циліндричній системі і щільності заряду), запишемо його у вигляді

$$\sigma''_{ik} = \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \delta_{ik} + \frac{1}{8\pi} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau \delta_{ik}. \quad (94)$$

З огляду на, що $E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$, $H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2$, отримуємо для максвелівського тензора натягу

$$\begin{aligned} \sigma' = & \frac{\varepsilon}{8\pi} \begin{pmatrix} E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 & 2E_x E_y & 2E_x E_z \\ 2E_x E_y & E_y^2 - E_x^2 - E_z^2 & 2E_y E_z \\ 2E_x E_z & 2E_y E_z & E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{\mu}{8\pi} \begin{pmatrix} H_x^2 - H_y^2 - H_z^2 & 2H_x H_y & 2H_x H_z \\ 2H_x H_y & H_y^2 - H_x^2 - H_z^2 & 2H_y H_z \\ 2H_x H_z & 2H_y H_z & H_z^2 - H_x^2 - H_y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (95)$$

Отже, тензор натягу електромагнітного поля є сумою тензорів натягу електричного і магнітного полів. Вони визначаються кожен напруженістю електричного і магнітного полів і відповідними властивостями середовища, тобто діелектричної та магнітної проникності і їх залежностями від щільності середовища. Тому далі ми будемо говорити тільки про тензор натягу електричного поля, розуміючи, що все це просто переноситься на випадок магнітного поля.

Стрикційний тензор може мати той же порядок величини, що і максвеловській. Однак при розгляді рівнодіюча сил, прикладених до діелектричних тілу, цей член може бути відкинутий. Це докладно описано в §34 книги [5]. Але при розгляді сил, що діють на незамкнуту поверхню, його треба враховувати. Природно, в вакуумі він відсутній. Для розріджених газів $\varepsilon - 1 \propto \tau$ і $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau = \varepsilon - 1 \ll 1$. У загальному випадку тензор стрикційних натягів (94) при підстановці в (89) забезпечує поверхневу щільність сили

$$\vec{T}'' = \frac{1}{8\pi} \left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \tau \vec{n}, \quad (96)$$

яка відповідає тиску, спрямованого уздовж нормалі \vec{n} , зокрема назовні.

Розглянемо, як веде себе поверхнева щільність сили, що описується максвелівським тензором натягу \vec{T}' , викликана електричним полем напруженістю \vec{E} , напрямок якого біля поверхні становить кут α з нормаллю до поверхні. Направимо вісь x вздовж нормалі, а осі y і z в площині, дотичній до поверхні, причому вісь y спрямована уздовж проекції вектора \vec{E} на площину yz . Тоді нормальна і тангенціальна компоненти поля збігаються з E_x і E_y , а $E_z = 0$. Підставивши вирази для компонент

$$E_x = E \cos \alpha = E_n, \quad E_y = E \sin \alpha = E_t, \quad E_z = 0 \quad (97)$$

в (95), отримаємо

$$\sigma' = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Після підстановки (98) і компонент нормалі $\vec{n} = (1, 0, 0)$ в (89) отримаємо компоненти

$$T'_x = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cos(2\alpha) = T'_n, \quad T'_y = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \sin(2\alpha) = T'_t, \quad T'_z = 0. \quad (99)$$

Так що модуль \vec{T}' дорівнює $\varepsilon E^2 / 8\pi$, а напрямок становить кут 2α з нормаллю в площині xy . Іншими словами, напрямок напруженості поля є бісектриса нормалі і напрямку \vec{T}' . При $0 < \alpha < \pi/4$ і $3\pi/4 < \alpha < \pi$ маємо $T'_n > 0$, при $\pi/4 < \alpha < 3\pi/4$ — $T'_n < 0$.

5.2.3. Густина поверхневих сил, що діють на ділянку кордону двох середовищ в електростатичному полі

Розглянемо поверхню розділу двох середовищ. Ми знайшли компоненти \vec{T}' з одного боку від неї. З іншого боку знаходиться середовище з діелектричною проникністю ε' . Тангенціальні компоненти вектора \vec{E} рівні по обидва боки від кордону розділу двох середовищ. Якщо на ній немає вільних зарядів, то рівні нормальні компоненти вектора \vec{D} . Це означає, що в другому середовищі нормальна компонента вектора \vec{E} перевищує E_n в ε/ε' разів. Позначимо їх штрихом, $E'_n = \varepsilon/\varepsilon' E_n$, $E'_t = E_t$.

З першої сторони маємо (99), цей вираз перепишемо у вигляді

$$T'_x = \frac{\varepsilon}{8\pi} (E_n^2 - E_t^2) = T'_n, \quad T'_y = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n E_t = T'_t, \quad T'_x = 0. \quad (100)$$

Поле з іншого боку забезпечує поверхневу щільність сили, викликану максвелівським тензором натягу, яка з урахуванням протилежного напрямку нормалі \vec{n} дорівнює

$$T'_x = -\frac{\varepsilon'}{8\pi} (E_n'^2 - E_t'^2) = \frac{\varepsilon'}{8\pi} \left(E_t^2 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} E_n^2 \right) = T'_n, \\ T'_y = -\frac{\varepsilon'}{4\pi} E'_n E'_t = -\frac{\varepsilon}{4\pi} E_n E_t = T'_t, \quad T'_x = 0. \quad (101)$$

Підсумовуючи обидві сили, отримуємо, що тангенціальна компонента поверхневої густини сили, викликані максвелівським тензором натягу, дорівнює нулю, а сума нормальних компонент дорівнює

$$\Delta T'_n = \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right) (\varepsilon E_n^2 + \varepsilon' E_t^2). \quad (102)$$

Припустимо, що ми розглядаємо границю рідини і вакууму (в реальності також і повітря, як і будь-якого розрядженого газу) з $\varepsilon' = 1$. Поблизу неї тиск в рідині відрізняється від атмосферного на величину

$$\Delta P = \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau + \frac{1 - \varepsilon}{8\pi} (\varepsilon E_n^2 + E_t^2). \quad (103)$$

Ми використовували (91) і врахували, що і стрікційна (96) і максвелівська (102) поверхнева густина сили знайдені в напрямку від рідини до вакууму.

5.2.4. Задача про підйом діелектричної рідини в конденсаторі

Розглянемо вертикально розташований конденсатор, частково занурений в рідину з щільністю τ , що має діелектричну проникність ε (див. рис.4). Необхідно знайти висоту підняття рідини всередині конденсатора h . Капілярні сили не враховуються. Напруженість поля в конденсаторі дорівнює E , поле майже однорідне, якщо знехтувати крайовими

ефектами. Для поверхні розділу всередині конденсатора поле повністю тангенційне $E_n = 0, E_t = E$.

Спочатку розв'яжемо задачу, використовуючи силовий підхід, тобто за допомогою тензора натягу. Тиск P_C в т. С, де електричне поле практично відсутня, дорівнює атмосферному тиску P_{atm} . У т. В тиск P_B дорівнює $P_{atm} + \Delta P$ з ΔP з (103). Знайдемо тиск P_A в т. А, що лежить на висоті т. С, але всередині конденсатора. З одного боку, гідростатичний тиск в т. А, що лежить на висоті h нижче і в тому ж електричному полі, так само

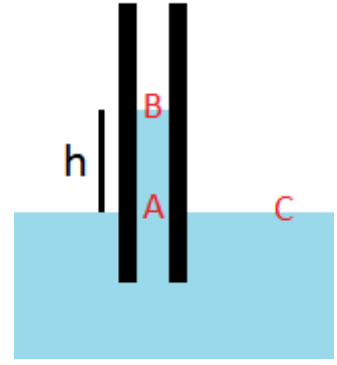


Рис. 4. Всередині конденсатора рівень рідини вище ніж ззовні

$$P_A = P_B + \tau g h = P_{atm} + \Delta P + \tau g h = P_{atm} + \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau + \frac{1-\varepsilon}{8\pi} E^2 + \tau g h. \quad (104)$$

З іншого боку, на маленький об'єм біля т. А, що знаходиться в електричному полі, буде діяти сума гідростатичного тиску P_A і тиск, який забезпечується стрікційним членом тензора натягу (96). Ця сума повинна дорівнювати аналогічній сумі для знаходиться на тій же висоті т. С, де другий доданок відсутня, тобто P_{atm} , тому

$$P_A = P_{atm} + \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau. \quad (105)$$

Прирівнюючи (104) і (105), отримуємо $\frac{1-\varepsilon}{8\pi} E^2 + \tau g h = 0$, тобто

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi \tau g} E^2. \quad (106)$$

Більш докладно про умову рівноваги рідини в присутності електричного поля см. §15 (зокрема формулу (15.18)) книги "Електродинаміка суцільних середовищ" Л.Д. Ландау і Є.М. Ліфшиця, М., "Наука", 1982 і вже згаданий §34 книги [4].

Для перевірки розв'яжемо задачу ще раз, застосувавши в цей раз енергетичний підхід. Введемо ряд позначень. Нехай відстань між пластинками конденсатора одно d , заряд на них дорівнює $\pm q$, висота пластини дорівнює b , при цьому довжина повністю зануреного в діелектрик ділянки (нижче т. А) дорівнює. Довжина пластин (в напрямку, перпендикулярному площині рисунка) дорівнює a . Тоді ємність конденсатора C і напруженість поля всередині нього рівні

$$C = \frac{a}{4\pi d} (\varepsilon(h + b_1) + b - h - b_1) = \frac{a}{4\pi d} [b + (\varepsilon - 1)b_1 + (\varepsilon - 1)h]. \quad (107)$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{q}{Cd} = \frac{4\pi q}{[b + (\varepsilon - 1)b_1 + (\varepsilon - 1)h]a}. \quad (108)$$

Сума енергії електричного поля конденсатора і потенційної енергії діелектрика, піднятого вгору в конденсаторі, дорівнює

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} \tau g h \times (dah) = \frac{2\pi d q^2}{[b + (\varepsilon - 1)b_1 + (\varepsilon - 1)h]a} + \frac{1}{2} \tau g d a h^2. \quad (109)$$

Вона повинна бути мінімальна при значенні h , яке і буде рішенням завдання. Диференціюючи і прирівнюючи нулю похідну по h , одержуємо умову

$$\frac{dW}{dh} = -\frac{2\pi d q^2 (\varepsilon - 1)}{[b + (\varepsilon - 1)b_1 + (\varepsilon - 1)h]^2 a} + \tau g d a h = a d \left\{ -\frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi} + \tau g h \right\} = 0, \quad (110)$$

яка призводить до тієї ж відповіді (106).

Додаткова література

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. — 832 с.
2. Гладуш В.Д., Куліков Д.О. Елементи векторного аналізу та теорії поля. 2010. — 126 с.
Електронний ресурс http://repository.dnu.dp.ua:1100/?page=inner_material&id=6690
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля М.: Наука, 1973. — 504 с.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества М.: Физматлит, 2003. — 616 с.
5. Батыгин В., Топтыгин И. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970. — 488 с.
6. Федорченко А. М., Теоретична фізика, т.1 Класична механіка і електродинаміка, Київ, Вища школа, 1992. — 535 с.